PRINCIPES
DE LA TRIGONOMETRIE SPHERIQUE
TIRÉS DE LA MÉTHODE DES PLUS GRANDS ET PLUS PETITS.

PAR M. EULER.

Puisqu'on sait que les arcs de grands cercles, tirés sur la surface d'une sphére, représentent le plus court chemin d'un point à l'autre, un triangle sphérique pourra être défini en sorte, que trois points étant donnés sur une surface sphérique, si l'on y trace d'un point à l'autre le plus court chemin, l'espace renfermé entre ces trois points soit un triangle sphérique. Donc, parce que les côtés d'un *triangle* sphérique sont les lignes les plus petites, qu'on peut tirer d'un angle à l'autre, la méthode des plus grands & plus petits pourra être employée à déterminer les côtés d'un triangle sphérique; & de là on pourra ensuite trouver le rapport, qui subsiste entre les angles & les côtés; & c'est en quoi consiste la Trigonométrie sphérique. Car les trois points, où se trouvent les angles, détermineront par là, tant les trois côtés que les trois angles: & ces six choses auront toujours un tel rapport entr'elles, que trois quelconques étant connuës, on en puisse déterminer les trois autres.

C'est donc une propriété, que les triangles sphériques ont commune avec les triangles plans, qui sont l'objet de la Trigonométrie élémentaire. Car, comme un triangle plan est l'espace renfermé entre trois points marqués sur un plan, lorsqu'on tire de l'un à l'autre la ligne la plus courte, qui est sur le plan une ligne droite; de même un triangle

angle ſphérique eſt l'eſpace renfermé entre trois points marqués ſur une ſurface ſphérique, lorsqu'on joint ces trois points par les lignes les plus courtes, qu'on ſauroit tirer de l'un à l'autre ſur la même ſurface. Or il eſt clair qu'un triangle ſphérique ſe change dans un triangle plan, lorsque le rayon de la ſphère devient infiniment grand; attendu qu'une ſurface plane peut-être regardée comme la ſurface d'une ſphére infiniment grande.

On m'objectera ſans doute, que c'eſt aller contre les régles de la méthode, que de vouloir employer le calcul des plus grands & plus petits pour établir les fondemens de la Trigonométrie ſphérique; outre qu'il paroit inutile de les tirer encore d'autres principes, puisque ceux dont on s'eſt ſervi jusqu'ici, ſont fondés ſur la Geométrie élémentaire, dont la rigueur ſert de régle à toutes les autres parties des Mathématiques. Mais d'abord je remarque, que la méthode des plus grands & plus petits en acquiert quaſi un nouveau luſtre, quand je ferai voir, qu'elle ſeule nous peut conduire à la réſolution des triangles ſphériques; & enſuite il eſt toujours utile de parvenir par des routes differentes aux mêmes vérités, puisque notre eſprit ne manque pas d'en tirer de nouveaux éclairciſſemens.

Mais je puis outre cela avancer, que la méthode des plus grands & plus petits eſt beaucoup plus générale que la méthode ordinaire. Car celle-cy ſe borne aux triangles formés ſur des ſurfaces, ou planes, ou ſphériques, au lieu que l'autre s'étend également à des ſurfaces quelconques. Ainſi, ſi l'on demandoit la nature des triangles formés ſur des ſurfaces ſphéroïdiques, ou conoïdiques, dont les côtés ſeroient les lignes les plus petites, qu'on peut tirer d'un angle à l'autre; la méthode ordinaire ne ſeroit pas propre pour cette recherche: mais il faudroit abſolument recourir à la méthode des plus grands & plus petits, ſans laquelle on ne ſeroit pas même en état de connoitre les lignes les plus courtes, qui formeroient les côtés de ces triangles.

On comprend de là, que cette recherche pourroit bien devenir d'une grande importance; car la ſurface de la Terre n'étant point ſphérique,

rique, mais ſphéroïdique, un triangle formé ſur la ſurface de la Terre apartiendra à l'eſpece, dont je viens de parler. Pour voir cela, on n'a qu'à s'imaginer trois points ſur la ſurface de la Terre, qui ſoient joints par le plus court chemin, qu'il y a de l'un à l'autre ; ou qui ſeroit formé par une corde tenduë de l'un à l'autre: car c'eſt ainſi qu'on doit ſe repréſenter les triangles, qu'on forme par les opérations faites pour la meſure de la Terre. Il eſt bien vrai qu'on regarde ordinairement ces triangles comme plans & rectilignes, & c'eſt déjà bien de l'accurateſſe, quand on les calcule ſur le pied des triangles ſphériques. Mais ſi l'on parvenoit à faire ces triangles beaucoup plus grands, & qu'on en voulut faire le calcul avec toute la précifion poſſible, on ſeroit ſans doute réduit à rechercher la véritable nature de ces triangles, dont on ne ſauroit venir à bout ſans recourir à la méthode des plus grands & des plus petits.

Ayant donc fait voir l'importance de cette méthode dans le ſujet dont il s'agit, il ne ſera pas mal à propos d'appliquer cette méthode à la réſolution des triangles ſphériques ; puiſque d'un côté cette recherche ſervira de baſe & de modéle pour la réſolution des triangles formés ſur une ſurface ſpéroïdique quelconque : & d'un autre côté elle nous fournira des éclairciſſemens conſidérables, tant ſur la Trigonometrie ſphérique même que ſur la méthode des plus grands & plus petits, dont on connoitra de plus en plus mieux l'étenduë & le grand uſage. Car, depuis qu'on a montré que la plûpart des problèmes méchaniques & phyſiques ſe réſolvent fort promtement par le moyen de cette méthode, il ne ſauroit être que très agréable de voir, que la même méthode apporte un ſi grand ſecours pour la réſolution des problèmes de la pure Géometrie.

Pour commencer cette recherche d'une maniere, qu'elle s'étende également à la ſphère & à un ſphéroïde quelconque, je regarde d'abord deux points oppoſés de la ſphère comme ſes poles, & le grand cercle, qui en eſt également éloigné, repréſentera l'équateur, & les lignes

les plus courtes tirées d'un pole à chaque point de l'équateur repréſenteront des méridiens, qui ſont perpendiculaires à l'équateur. Or quand il s'agit de la ſphère, on pourra regarder chaque côté d'un triangle ſphérique comme faiſant partie de l'équateur, & quand le triangle eſt rectangle, on pourra toujours enviſager l'un des côtés, qui forment l'angle droit, comme une portion de l'équateur, & l'autre côté comme une portion d'un méridien, puiſqu'on peut prendre les deux poles à volonté ; mais il n'en ſera pas de même, dès que la ſurface n'eſt plus ſphérique, mais ſphéroïdique. Cependant je ne parlerai ici que des ſurfaces ſphériques, me reſervant les ſphéroïdiques pour un autre Mémoire.

PROBLEME I.

Fig. 1. 1. *Etant donnés ſur l'équateur* AB *l'arc* AP, *& ſur un méridien* CP *l'arc* PM, *trouver ſur la ſurface ſphérique la plus courte ligne* AM, *qu'on puiſſe tirer du point* A *au point* M.

SOLUTION.

Poſant le demi-diametre de la ſphère $= 1$, ſoit l'arc de l'équateur $AP = x$, & l'arc du méridien $PM = y$. Soit de plus l'arc cherché $AM = s$, qu'on prolonge infiniment peu en m, de ſorte que $Mm = ds$, & qu'on tire par m le méridien Omp, & l'élément Mn, qui y ſoit perpendiculaire. Cela poſé, on aura $Pp = dx$, & $mn = dy$; & puiſque Pp eſt à Mn, comme le ſinus total 1 au ſinus de l'arc OM, ou au coſinus de $PM = y$, on aura $Mn = dx \cos y$: & le triangle Mnm à n rectangle fournira

$$Mm = ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2 \cos y^2)}, \text{ \& partant}$$
$$AM = s = \int \sqrt{(dy^2 + dx^2 \cos y^2)}.$$

Il s'agit donc de trouver un tel rapport entre x & y, que ſi on leur donne des valeurs déterminées comme AP & PM, la valeur de l'intégrale $\int \sqrt{(dy^2 + dx^2 \cos y^2)}$ devienne la plus petite, qu'il

qu'il ſoit poſſible. Pour cet effet poſons $dy = p\,dx$, pour réduire cette intégrale à cette forme $\int dx\,V(pp + \cos y^2)$; & puisque j'ai démontré que lorsque la formule intégrale $\int Z\,dx$, où Z eſt telle fonction de x, y, & p, que $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, doit devenir un plus grand ou plus petit, cela arrive par cette équation $N\,dx - dP = 0$. Donc, faiſant l'application à notre cas, nous aurons

$$Z = V(pp + \cos y^2), \text{ donc } dZ = -\frac{dy \sin y \cos y}{V(pp + \cos y^2)} + \frac{p\,dp}{V(pp + \cos y^2)},$$

& partant $M = 0$, $N = -\dfrac{\sin y \cos y}{V(pp + \cos y^2)}$, & $P = \dfrac{p}{V(pp + \cos y^2)}$.

Or puisque $M = 0$, & partant $dZ = N\,dy + P\,dp$, multiplions l'équation $N\,dx - dP = 0$ par p, qui à cauſe de $dy = p\,dx$ deviendra $N\,dy - p\,dP = 0$, ou $N\,dy = p\,dP$, & cette valeur étant ſubſtituée pour $N\,dy$ donnera $dZ = p\,dP + P\,dp$, dont l'intégrale eſt $Z = Pp + C$, ou bien $V(pp + c\,y^2) = \dfrac{pp}{V(pp + c\,y^2)} + C$:

qui ſe réduit à $\cos y^2 = C\,V(pp + \cos y^2)$; d'où l'on tire

$$CCpp = \cos y^2\,(\cos y^2 - CC), \text{ ou } p = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y\,V(\cos y^2 - CC)}{C}.$$

Ainſi le rapport entre x & y eſt renfermé dans cette équation differentielle ſeparée:

$$dx = \frac{C\,dy}{\cos y\,V(\cos y^2 - CC)}, \qquad \text{\& de là on obtiendra :}$$

$$ds = dx\,V(pp + \cos y^2) = \frac{dx \cos y^2}{C}, \qquad \text{donc}$$

$$ds = \frac{dy \cos y}{V(\cos y^2 - CC)}, \quad \text{\& l'arc même} \quad s = \int \frac{dy \cos y}{V(\cos y^2 - CC)}.$$

 co-

COROLL. I.

2. Donc l'équation $dx = \frac{C dy}{\operatorname{cof} y \, V(\operatorname{cof} y^2 - CC)}$, exprime la nature de la ligne AM, qui a cette propriété, qu'en prenant une partie quelconque, elle foit la ligne la plus courte qu'on puiffe tirer entre fes termes fur une furface fphérique. Or, que cette ligne foit en même tems un grand cercle de la fphére, je l'ai démontré ailleurs; & ici il n'importe pas à notre deffein, quel rapport cette ligne à la fphére, pourvû que nous fachions qu'elle eft la plus courte entre fes termes.

COROLL. 2.

3. Ayant trouvé $dx = \frac{C dy}{\operatorname{cof} y \, V(\operatorname{cof} y^2 - CC)}$, nous aurons $Mn = dx \operatorname{cof} y = \frac{C dy}{V(\operatorname{cof} y^2 - CC)}$. Or $\frac{Mn}{mn}$ exprime la tangente de l'angle AMP, & partant nous aurons: tang AMP $= \frac{C}{V(\operatorname{cof} y^2 - CC)}$. De plus ayant $Mm = ds = \frac{dy \operatorname{cof} y}{V(\operatorname{cof} y^2 - CC)}$, la fraction $\frac{Mn}{Mm}$ exprime le finus de l'angle AMP, de forte que fin AMP $= \frac{C}{\operatorname{cof} y}$, & cof AMP $= \frac{V(\operatorname{cof} y^2 - CC)}{\operatorname{cof} y}$.

COROLL. 3.

4. De plus pofant $y = 0$, le point M parviendra en A, & alors la fraction $\frac{dy}{dx}$ exprimera la tangente de l'angle PAM, & $\frac{dy}{ds}$ fon finus, & $\frac{dx}{ds}$ fon cofinus. Or ayant alors $\operatorname{cof} y = 1$, il fera $dx = \frac{C dy}{V(1 - CC)}$ &

& $ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-CC)}}$: d'où nous tirons tang PAM $= \frac{\sqrt{(1-CC)}}{C}$; ſin PAM $= \sqrt{(1-CC)}$ & coſ PAM $= C$.

COROLL. 4.

5. Donc, ſi nous introduiſons cet angle PAM au lieu de la conſtante C, & que nous poſions PAM $= \zeta$, à cauſe de C $=$ coſ ζ, nous aurons, les deux équations ſuivantes :

$$dx = \frac{dy \operatorname{cof} \zeta}{\operatorname{cof} y \sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - \operatorname{cof} \zeta^2)}} \quad \& \quad ds = \frac{dy \operatorname{cof} y}{\sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - \operatorname{cof} \zeta^2)}}.$$

Et de plus ſi nous nommons l'angle AMP $= \theta$, nous aurons :

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\operatorname{cof} \zeta}{\sqrt{(\operatorname{cf} y^2 - \operatorname{cf} \zeta^2)}}; \ \operatorname{fin} \theta = \frac{\operatorname{cof} \zeta}{\operatorname{cof} y} \ \& \ \operatorname{cof} \theta = \frac{\sqrt{(\operatorname{cof} y^2 - \operatorname{cof} \zeta^2)}}{\operatorname{cof} y}.$$

COROLL. 5.

6. Il reſte encore à intégrer nos deux équations differentielles, qui expriment les valeurs de dx & de ds. Or on trouvera par l'intégration :

$$x = \text{A fin:} \frac{C \operatorname{fin} y}{\operatorname{cof} y \sqrt{1-CC)}}, \text{ ou bien fin } x = \frac{C \operatorname{fin} y}{\operatorname{cof} y \sqrt{(1-CC)}} = \frac{\operatorname{cof} \zeta \operatorname{fin} y}{\operatorname{fin} \zeta \operatorname{cof} y}.$$

$$\& \ s = \text{A cf:} \frac{\sqrt{(\operatorname{cf} y^2 - CC)}}{\sqrt{(1-CC)}}, \text{ ou bien cf} s = \frac{\sqrt{(\operatorname{cf} y^2 - CC)}}{\sqrt{(1-CC)}} = \frac{\sqrt{(\operatorname{cf} y^2 - \operatorname{cf} \zeta^2)}}{\operatorname{fin} \zeta}.$$

COROLL. 6.

7. Voilà donc des quantités ζ & y les autres quantités x, s & θ déterminées en ſorte :

ſin

$$\sin x = \frac{\cos\zeta \sin y}{\sin\zeta \cos y};\ \cos x = \frac{\sqrt{(\cos y^2 - \cos\zeta^2)}}{\sin\zeta \cos y},\ \&\ \mathrm{tang}\, x = \frac{\cos\zeta \sin y}{\sqrt{(\cos y^2 - \cos\zeta^2)}}$$

$$\sin s = \frac{\sin y}{\sin\zeta};\ \cos s = \frac{\sqrt{(\cos y^2 - \cos\zeta^2)}}{\sin\zeta},\ \&\ \mathrm{tang}\, s = \frac{\sin y}{\sqrt{(\cos y^2 - \cos\zeta^2)}}$$

$$\sin\theta = \frac{\cos\zeta}{\cos y};\ \cos\theta = \frac{\sqrt{(\cos y^2 - \cos\zeta^2)}}{\cos y},\ \&\ \mathrm{tang}\,\theta = \frac{\cos\zeta}{\sqrt{(\cos y^2 - \cos\zeta^2)}}.$$

COROLL. 7.

8. Puisqu'il n'y a que cette ſeule formule irrationnelle $\sqrt{(\cos y^2 - \cos\zeta^2)}$, qui entre dans nos équations trouvées, en l'eliminant, nous obtiendrons :

$$\frac{\cos s}{\cos x} = \cos y;\quad \frac{\cos\theta}{\cos x} = \sin\zeta;\quad \frac{\cos\theta}{\cos s} = \frac{\sin\zeta}{\cos y};$$

$$\frac{\mathrm{tang}\, x}{\mathrm{tang}\, s} = \cos\zeta;\quad \frac{\mathrm{tang}\, x}{\mathrm{tang}\,\theta} = \sin y;\quad \frac{\mathrm{tang}\, s}{\mathrm{tang}\,\theta} = \frac{\sin y}{\cos\zeta};$$

$$\sin x = \frac{\cos\zeta \sin y}{\sin\zeta \cos y};\ \cos x\ \mathrm{tang}\, s = \frac{\sin y}{\sin\zeta \cos y}:\ \cos x\ \mathrm{tang}\,\theta = \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta \cos y};$$

$$\cos s\ \mathrm{tang}\, x = \frac{\cos\zeta \sin y}{\sin\zeta};\quad \sin s = \frac{\sin y}{\sin\zeta};\quad \cos s\ \mathrm{tang}\,\theta = \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta};$$

$$\cos\theta\ \mathrm{tang}\, x = \frac{\cos\zeta \sin y}{\cos y};\quad \cos\theta\ \mathrm{tang}\, s = \frac{\sin y}{\cos y};\quad \sin\theta = \frac{\cos\zeta}{\cos y}.$$

COROLL. 8.

9. Ayant ici cinq quantités x, y, s, ζ & θ, qui appartiennent au triangle ſphérique rectangle APM, prenons des égalités trouvées celles, qui n'en renferment que trois, qui ſeront étant réduites à la plus ſimple forme :

I. coſ

I. $\cos s = \cos x \cos y$; II. $\cos\theta = \sin\zeta \cos x$; III. $\operatorname{tg} x = \cos\zeta \operatorname{tg} s$;

IV. $\operatorname{tang} x = \sin y \operatorname{tg}\theta$; V. $\operatorname{tg} y = \sin x \operatorname{tg}\zeta$; VI. $\sin y = \sin\zeta \sin s$;

VII. $\cos s \operatorname{tang}\zeta \operatorname{tg}\theta = 1$; VIII. $\operatorname{tg} y = \cos\theta \operatorname{tg} s$; IX. $\cos\zeta = \sin\theta \cos y$.

d'où, étant donnés deux quelconques, on en pourra trouver les trois autres, ſans qu'on ait beſoin d'extraction de racines, pourvu qu'on y ajoute cette dixième : X. $\sin x = \sin\theta \sin s$, qui ſuit d'abord des trois premières formules à la gauche du §. 6.

PROBLEME II.

10. *Expoſer les régles, pour la réſolution de tous les cas des triangles rectangles ſphériques.*

SOLUTION.

Soient les angles marqués par A, B, C, dont celui-cy C ſoit le droit, & les côtés par les petites lettres a, b, c, qui répondent aux angles oppoſés, de ſorte que c ſoit l'hypotenuſe, & a, & b les cathetes. Comparant donc ce triangle avec la figure précedente, nous aurons : Fig. 1.

$$s = c\ ; \quad x = b\ ; \quad y = a\ ; \quad \zeta = A \quad \& \quad \theta = B.$$

Maintenant tout revient à ce que deux de ces cinq quantités étant données, on en détermine les trois autres : or les formules rapportées fourniront les réſolutions ſuivantes pour tous les cas poſſibles.

Les

Les 2. quantités données.	Détermination des trois autres.		
I. a, b	coſ $c =$ coſ a.coſ b ;	tg A $= \frac{\text{tang } a}{\text{ſin } b}$;	tg B $= \frac{\text{tang } b}{\text{ſin } a}$
II. a, c	coſ $b = \frac{\text{coſ } c}{\text{coſ } a}$;	ſn A $= \frac{\text{ſin } a}{\text{ſin } c}$;	cſ B $= \frac{\text{tang } a}{\text{tang } c}$
III. b, c	coſ $a = \frac{\text{coſ } c}{\text{coſ } b}$;	cſ A $= \frac{\text{tang } b}{\text{tang } c}$;	ſn B $= \frac{\text{ſin } b}{\text{ſin } c}$
IV. a, A	ſin $b = \frac{\text{tang } a}{\text{tang A}}$;	ſin $c = \frac{\text{ſin } a}{\text{ſin A}}$;	ſn B $= \frac{\text{coſ A}}{\text{coſ } a}$
V. a, B	tag $b =$ ſin a tng B ;	tg $c = \frac{\text{tang } a}{\text{coſ B}}$;	cſ A $=$ cſ a.ſin B
VI. b, A	tag $a =$ ſin b tng A ;	tg $c = \frac{\text{tang } b}{\text{coſ A}}$;	cſ B $=$ cſ b.ſin A
VII. b, B	ſin $a = \frac{\text{tang } b}{\text{tang B}}$;	ſin $c = \frac{\text{ſin } b}{\text{ſin B}}$;	ſin A $= \frac{\text{coſ B}}{\text{coſ } b}$
VIII. c, A	ſin $a =$ ſin c. ſin A ;	tg $b =$ tg c.coſ A ;	tg B $= \frac{1}{\text{cſ } c\text{. tg A}}$
IX. c, B	ſin $b =$ ſin c. ſin B ;	tg $a =$ tg c.coſ B ;	tg A $= \frac{1}{\text{cſ } c\text{. tg B}}$
X. A, B	coſ $a = \frac{\text{coſ A}}{\text{ſin B}}$;	cſ $b = \frac{\text{coſ B}}{\text{ſin A}}$;	coſ $c = \frac{1}{\text{tg A.tg B}}$

COROLL. I.

11. De là il eſt evident que le côté a avec ſon angle opposé A entre également dans ces formules, que l'autre côté b avec ſon

ſon angle oppoſé B, de ſorte qu'il eſt indifferent, lequel des deux côtés a & b on veuïlle prendre pour baſe, tout comme la nature du ſujet l'exige.

COROLL. 2.

12. Le grand nombre des formules, qui expriment le rapport entre les diverſes parties du triangle rectangle, ſe réduit aux formules ſuivantes, dont le nombre eſt plus petit, & qu'il ſuffit de ſavoir par cœur.

I. $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$ ou $\sin c = \frac{\sin b}{\sin B}$.

II. $\cos c = \cos a . \cos b$

III. $\cos c = \cot A . \cot B$

IV. $\cos A = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, c}$ ou $\cos B = \frac{\text{tang}\, a}{\text{tang}\, c}$

V. $\sin A = \frac{\cos B}{\cos b}$ ou $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$

VI. $\sin a = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, B}$ ou $\sin b = \frac{\text{tang}\, a}{\text{tang}\, A}$.

COROLL. 3.

13. On n'a donc qu'à remarquer ces ſix formules, qui contiennent autant de propriétés des triangles ſphériques rectangles; & on ſera en état de réſoudre tous les cas de ces triangles, qu'on puiſſe imaginer.

PROBLEME III.

14. *Trouver l'aire d'un triangle ſphérique rectangle.*

SOLUTION.

Soit dans le triangle rectangle APM la baſe AP $= x$ & le côté PM $= y$, & ayant tiré le méridien infiniment proche Omp, Fig. 1.

 on

on aura $Pp = dx$ & $mn = dy$. De plus ayant $Mn = dx \cos y$, l'élément de l'aire $PMmp$ fera $= dx\,dy \cos y$, en prenant dx pour constant. Donc l'aire même $PMmp$ fera $= dx \sin y$, laquelle étant le differentiel de l'aire du triangle APM, celle-cy fera $= \int dx \sin y$. Or nous avons trouvé $dx = \frac{dy \cos \zeta}{\cos y \sqrt{(\cos y^2 - \cos \zeta^2)}}$, où ζ marque l'angle PAM, & partant l'aire du triangle fera $=$ $= \int \frac{dy \sin y \cos \zeta}{\cos y \sqrt{(\cos y^2 - \cos \zeta^2)}}$. Au lieu de y introduisons l'angle $AMP = \theta$; & à cause de $\sin \theta = \frac{\cos \zeta}{\cos y}$ & $\cos \theta = \frac{\sqrt{(\cos y^2 - \cos \zeta^2)}}{\cos y}$, nous aurons $d\theta \cos \theta = \frac{dy \cos \zeta \sin y}{\cos y^2}$; donc $d\theta = \frac{dy \cos \zeta \sin y}{\cos y \sqrt{(\cos y^2 - \cos \zeta^2)}}$; de sorte que l'aire du triangle cherchée devienne $= \int d\theta = \theta + \text{Const.}$ Pour assigner à cette constante sa juste valeur, il faut considérer, que l'aire doit évanouïr, lorsque le point M tombe en A, auquel cas l'angle θ devient $= 90° - \zeta$; donc il faut qu'il soit $90° - \zeta + \text{Const} = 0$, & partant $\text{Const} = \zeta - 90°$. Par conséquent l'aire cherchée du triangle APM sera $= \zeta + \theta - 90°$; ou bien l'excès de la somme des deux angles PAM & AMP sur un angle droit exprimera l'aire du triangle APM.

COROLL. I.

15. Donc la somme des deux angles PAM & AMP est toujours plus grande qu'un angle droit, & l'excès est d'autant plus grand, plus l'aire du triangle sera grande. Et un arc de grand cercle, mesure de cet excès, étant multiplié par le rayon de la sphère donnera l'aire du triangle sphérique.

COROLL. 2.

16. De là on déduira aisément l'aire d'un triangle sphérique quelconque : car, parce qu'un tel triangle se peut résoudre en deux tri-

an-

angles rectangles, on trouvera son aire, lorsqu'on multiplie l'excès de la somme de ses trois angles sur 180° par le rayon de la sphère.

PROBLEME IV.

17. *Sur la surface d'une sphère étant donnés deux points quelconques* E & M, *trouver la ligne la plus courte* EM *entre ces deux points.*

SOLUTION.

Qu'on tire d'un des poles O à ces deux points les méridiens OE & OM, dont celui-cy soit regardé comme variable. Nommons le méridien OE $= a$; OM $= x$; & l'angle EOM $= y$. De plus soit pour les quantités cherchées l'arc EM $= s$, l'angle OEM $= \alpha$, & l'angle OME $= \Phi$; qui sera variable avec les quantités x, y & s, tandis que a & α demeurent invariables. Qu'on tire le méridien infiniment proche Om, auquel on tire de M la perpendiculaire Mn, & on aura $mn = dx$; l'angle MO$m = dy$, & M$n = dy \sin x$, prenant l'unité pour marquer le rayon de la sphère. De là nous aurons $\operatorname{tg} \Phi = \frac{Mn}{mn} = \frac{dy \sin x}{dx}$, ou bien $\sin \Phi = \frac{dy \sin x}{ds}$, & $\cos \Phi = \frac{dx}{ds}$. Or ayant $ds = V(dx^2 + dy^2 \sin x^2)$, il faut que cette formule $\int V(dx^2 + dy^2 \sin x^2)$ soit un *minimum*. Pour cet effet posons $dy = p\,dx$, pour avoir cette formule $\int dx\,V(1 + pp \sin x^2) = \int Z\,dx$ à rendre la plus petite : de sorte que $Z = V(1 + pp \sin x^2)$. Or en général, si l'on a $dZ = M dx + N dy + P dp$, l'équation pour le *minimum* est $N dx - dP = 0$: donc faisant l'application à notre cas, nous avons $N = 0$; & $P = \frac{p \sin x^2}{V(1 + pp \sin x^2)}$. Mais à cause de $N = 0$, notre équation sera $dP = 0$, & partant $P =$ Const. Par conséquent

nous

nous aurons $\frac{p \sin x^2}{\sqrt{(1 + pp \sin x^2)}} = C$, ou $\frac{dy \sin x^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 \sin x^2)}} = C$, c'est à dire $\frac{dy \sin x^2}{ds} = \sin x \sin \Phi = C$. Pour déterminer cette constante il faut considérer, que faisant évanouïr l'angle $EOM = y$, il devient $x = a$, & $\Phi = 180^\circ - \alpha$, ou $\sin \Phi = \sin \alpha$; donc dans ce cas nous avons $\sin a . \sin \alpha = C$. Par conséquent la nature du *minimum* fournit l'équation : $\frac{dy \sin x^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 \sin x^2)}} = \sin a \sin \alpha$, Mais, il faut encore intégrer l'équation différentielle ; qui se change en celle-cy $dy = \frac{C\,dx}{\sin x \sqrt{(\sin x^2 - CC)}}$ remettant C pour $\sin a \sin \alpha$: & de là à cause de $ds = \frac{dy \sin x^2}{C}$ on aura encore $ds = \frac{dx \sin x}{\sqrt{(\sin x^2 - CC)}}$.

Or on trouvera par les régles de l'intégration :

$$y = -A \sin \frac{C \cos x}{\sin x \sqrt{(1 - CC)}} + A \sin \frac{C \cos a}{\sin a \sqrt{(1 - CC)}} =$$

$$- A \cos \frac{\sqrt{(\sin x^2 - CC)}}{\sin x \sqrt{(1 - CC)}} + A \cos \frac{\sqrt{(\sin a^2 - CC)}}{\sin a \sqrt{(1 - CC)}}.$$

$$s = - A \cos \frac{\sqrt{(\sin x^2 - CC)}}{\sqrt{(1 - CC)}} + A \cos \frac{\sqrt{(\sin a^2 - CC)}}{\sqrt{(1 - CC)}} =$$

$$- A \sin \frac{\cos x}{\sqrt{(1 - CC)}} + A \sin \frac{\cos a}{\sqrt{(1 - CC)}}.$$

Où les constantes ajoutées sont telles, que faisant $y = 0$ & $s = 0$, il devienne $x = a$. Mais les deux arcs de cercles étant réduits en un donneront $y = A \sin \frac{C \cos a \sqrt{(\sin x^2 - CC)} - C \cos x \sqrt{(\sin a^2 - CC)}}{(1 - CC) \sin a \sin x}$,

$$s = A \sin \frac{\cos a \sqrt{(\sin x^2 - CC)} - \cos x \sqrt{(\sin a^2 - CC)}}{1 - CC},$$

d'où

d'où nous tirons ces deux équations :

$$(1-CC)\sin a \sin x \sin y = C \cos a \sqrt{(\sin x^2 - CC)} - C \cos x \sqrt{(\sin a^2 - CC)}$$

$$(1-CC)\sin s = \cos a \sqrt{(\sin x^2 - CC)} - \cos x \sqrt{(\sin a^2 - CC)}.$$

Mais, en prenant les cosinus des angles y & s, nous aurons :

$$(1-CC)\sin a \sin x \cos y = \sqrt{(\sin a^2 - CC)(\sin x^2 - CC)} + CC \cos a \cos x$$

$$(1-CC)\cos s = \sqrt{(\sin a^2 - CC)(\sin x^2 - CC)} + \cos a \cos x.$$

Et remettant pour C sa valeur $\sin a \sin \alpha$, puisque

$$\sqrt{(\sin a^2 - CC)} = -\sin a \cos \alpha$$

car nous regardons ici l'angle α comme obtus, afin que l'angle ϕ soit depuis le point E aigu ; parce que posant $y = 0$, l'angle ϕ devient $180° - \alpha$, dont le cosinus est $-\cos \alpha$; nous aurons :

$$(1-\sin a^2 \sin \alpha^2)\sin x \sin y = \sin \alpha \cos a \sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} + \sin \alpha \cos \alpha \sin a \cos x$$

$$(1-\sin a^2 \sin \alpha^2)\sin x \cos y = -\cos \alpha \sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} + \sin a \cos a \sin \alpha^2 \cos x$$

$$(1-\sin a^2 \sin \alpha^2)\sin s = \cos a \sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} + \sin a \cos \alpha \cos x$$

$$(1-\sin a^2 \sin \alpha^2)\cos s = -\sin a \cos \alpha \sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} + \cos a \cos x$$

auxquelles il faut ajouter $\sin x \sin \phi = \sin a \sin \alpha$.

COROLL. I.

18. Puisque $\sin a \sin \alpha = \sin x \sin \phi$, on aura :

$$\sqrt{(\sin x^2 - \sin a^2 \sin \alpha^2)} = + \sin x \cos \phi.$$

Donc nos quatre formules seront :

I. $(1-CC)\sin y = \sin \alpha \cos a \cos \phi + \cos \alpha \cos x \sin \phi$

II. $(1-CC)\cos y = -\cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \cos a \cos x \sin \phi$

 III.

III. $(1 - CC) \sin s = \cos a \sin x \cos \Phi + \sin a \cos \alpha \cos x$

IV. $(1 - CC) \cos s = - \sin a \cos \alpha \sin x \cos \Phi + \cos a \cos x$,

posant pour abréger CC, au lieu de $\sin a^2 \sin \alpha^2$, ou de $\sin x^2 \sin \Phi^2$.

COROLL. 2.

19. Ces quatre formules peuvent être combinées en plusieurs manieres differentes, d'où l'on pourra déduire des formules plus simples. D'abord prenons I. $\cos \alpha$ + II. $\sin \alpha \cos a$, & nous aurons :

$$(1 - CC)(\cos \alpha \sin y + \sin \alpha \cos a \cos y) = (\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 \cos a^2) \cos x \sin \Phi,$$

or $\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 \cos a^2 = 1 - \sin \alpha^2 \sin a^2 = 1 - CC$, d'où nous tirons :

$$\cos \alpha \sin y + \sin \alpha \cos a \cos y = \cos x \sin \Phi = \frac{\sin a \sin \alpha}{\tang x},$$

ou $\tang x \sin y + \tang \alpha \tang x \cos a \cos y = \tang \alpha \sin a$.

COROLL. 3.

20. Faisons cette combinaison I. $\sin \alpha \cos a$ − II. $\cos \alpha$, pour avoir

$$(1 - CC)(\sin \alpha \cos a \sin y - \cos \alpha \cos y) = (\sin \alpha^2 \cos a^2 - \cos \alpha^2) \cos \Phi$$
$$= (1 - CC) \cos \Phi,$$

d'où nous tirons en divisant par $1 - CC$

$$\sin \alpha \cos a \sin y - \cos \alpha \cos y = \cos \Phi.$$

COROLL. 4.

21. La combinaison I. $\sin x$ − III. $\sin \alpha$ donne

$(1 - CC)(\sin x \sin y - \sin \alpha \sin s) = 0$, ou bien

$\sin x \sin y = \sin \alpha \sin s$, d'où à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$,

on tire $\sin a \sin y = \sin \Phi \sin s$, ou bien cette proportion :

$\sin a : \sin \Phi = \sin x : \sin \alpha = \sin s : \sin y$.

COROLL. 5.

22. Cette combinaison I. $\sin a \cos \alpha \sin x$ + IV. $\sin x \cos a$ donne
$(1-CC)(\sin a \cos\alpha \sin x \sin y + \sin \alpha \cos a \cos s) = \cos x (\sin a \cos\alpha^2 \sin x \sin\Phi + \sin\alpha \cos a^2)$
Or à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$, la valeur de cette formule sera
$$\sin\alpha \cos x (\sin a^2 \cos\alpha^2 + \cos \alpha^2) = (1 - \sin a^2 \sin \alpha^2) \sin\alpha \cos x$$
$$= (1 - CC) \sin\alpha \cos x,$$
d'où en divisant par $1 - CC$ on obtiendra
$$\sin a \cos\alpha \sin x \sin y + \sin\alpha \cos a \cos s = \sin\alpha \cos x,$$
laquelle à cause de $\sin y = \frac{\sin\alpha \sin s}{\sin x}$, se change en :
$$\sin a \cos\alpha \sin s + \cos a \cos s = \cos x.$$

COROLL. 6.

23. Or cette combinaison I. $\cos a$ — IV. $\cos\alpha \sin\Phi$, donne
$(1-CC)(\cos a \sin y - \cos\alpha \sin\Phi \cos s = \cos\Phi (\sin\alpha \cos a^2 + \sin a \cos\alpha^2 \sin x \sin\Phi),$
dont la valeur à cause de $\sin x \sin\Phi = \sin a \sin\alpha$, sera :
$$\sin\alpha \cos\Phi (\cos a^2 + \sin a^2 \cos\alpha^2) = (1 - CC) \sin\alpha \cos\Phi.$$
Donc divisant par $1 - CC$, on aura
$$\cos a \sin y - \cos\alpha \sin\Phi \cos s = \sin\alpha \cos\Phi,$$
qui à cause de $\sin y = \frac{\sin\Phi \sin s}{\sin a}$, se change en celle-cy :
$$\cos a \sin\Phi \sin s - \sin a \cos\alpha \sin\Phi \cos s = \sin a \sin\alpha \cos\Phi,$$
ou bien $\tan\Phi \sin s - \cos\alpha \tan a \tan\Phi \cos s = \sin\alpha \tan a.$

COROLL. 7.

24. Considérons cette combinaison II. $\cos a \sin x$ + III. $\cos\alpha$, qui donne

(1 —

$$(1-CC)(\cos a \sin x \cos y + \cos \alpha \sin s) = \cos x (\sin \alpha \cos a^2 \sin x \sin \Phi + \sin a \cos \alpha^2);$$

dont la valeur, à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$, sera

$$\sin a \cos x (\sin \alpha^2 \cos a^2 + \cos \alpha^2) = (1 - CC) \sin a \cos x.$$

Donc divisant par $1 - CC$, on aura

$$\cos a \sin x \cos y + \cos \alpha \sin s = \sin a \cos x,$$

& à cause de $\sin s = \frac{\sin x \sin y}{\sin \alpha}$, on obtiendra

$$\sin \alpha \cos a \sin x \cos y + \cos \alpha \sin x \sin y = \sin \alpha \sin a \cos x,$$

ou $\tang \alpha \cos a \tang x \cos y + \tang x \sin y = \tang \alpha \sin a$, tout comme §. 19.

COROLL. 8.

25. Cette combinaison $-\text{II}. \sin a \cos \alpha + \text{III}. \cos a \sin \alpha \sin \Phi$ donne

$$(1-CC)(\cos a \sin \alpha \sin s \sin \Phi - \sin a \cos \alpha \cos y) = \cos \Phi (\sin a \cos \alpha^2 + \cos a^2 \sin \alpha \sin x \sin \Phi),$$

dont la valeur à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$, est

$$\sin a \cos \Phi (\cos \alpha^2 + \cos a^2 \sin \alpha^2) = (1 - CC) \sin a \cos \Phi.$$

Donc divisant par $1 - CC$, on aura :

$$\cos a \sin \alpha \sin s \sin \Phi - \sin a \cos \alpha \cos y = \sin a \cos \Phi.$$

Or ayant $\sin s = \frac{\sin a \sin y}{\sin \Phi}$, on obtiendra

$$\cos a \sin \alpha \sin y - \cos \alpha \cos y = \cos \Phi,$$ tout comme §. 20.

COROLL. 9.

26. Or cette combinaison $\text{II}. \sin a \sin x - \text{IV}. 1$ donne

$$(1-CC)(\sin a \sin x \cos y - \cos s) = \cos a \cos x (\sin a \sin \alpha \sin x \sin \Phi - 1),$$

dont la valeur à cause de $\sin x \sin \Phi = \sin a \sin \alpha$, est

$$\cos a \cos x (\sin a^2 \sin \alpha^2 - 1) = -(1-CC) \cos a \cos x.$$

Donc

Donc, divisant par $-(1-CC)$, on aura

$$\cos s - \sin a \sin x \cos y = \cos a \cos x.$$

COROLL. 10.

27. Cette combinaison $II.1 - IV. \sin \alpha \sin \Phi$ donne

$$(1-CC)(\cos y - \sin \alpha \sin \Phi \cos s) = \cos \alpha \cos \Phi (\sin a \sin \alpha \sin x \sin \Phi - 1),$$

donc : $\sin \alpha \sin \Phi \cos s - \cos y = \cos \alpha \cos \Phi$.

COROLL. 11.

28. Cette combinaison $III. \sin a \cos \alpha + IV. \cos a$ donne

$$(1-CC)(\sin a \cos \alpha \sin s + \cos a \cos s) = \cos x (\sin a^2 \cos \alpha^2 + \cos a^2)$$

donc : $\sin a \cos \alpha \sin s + \cos a \cos s = \cos x$, tout comme §. 22.

COROLL. 12.

29. Enfin cette combinaison $III. \cos a - IV. \sin a \cos \alpha$ donne

$$(1-CC)(\cos a \sin s - \sin a \cos \alpha \cos s) = \sin x \cos \Phi (\cos a^2 + \sin a^2 \cos \alpha^2),$$

donc : $\cos a \sin s - \sin a \cos \alpha \cos s = \sin x \cos \Phi = \frac{\sin a \sin \alpha \cos \Phi}{\sin \Phi}$,

ou $\text{tang}\, \Phi \sin s - \text{tang}\, a\, \text{tang}\, \Phi \cos \alpha \cos s = \text{tang}\, a \sin \alpha$, tout comme §. 23.

PROBLEME V.

30. *Trouver les propriétés entre les côtés & les angles d'un triangle sphérique quelconque.* Fig. 4.

SOLUTION.

Quel que soit le triangle sphérique proposé ABC, on peut regarder un de ses angles A comme le pole de la sphère ; & alors les côtés AB & AC seront deux méridiens, & le troisième côté BC la ligne la plus courte, qui puisse être tirée sur la surface de la sphère du

du point B au point C ; de sorte que ce triangle ABC puisse être comparé avec la figure ECM, que nous venons de considérer dans le problème précedent. Donc, si nous employons les lettres A, B, C, pour marquer les angles du même nom, & que nous posions les côtés $AB = c$; $AC = b$ & $BC = a$, les dénominations précedentes se réduiront aux présentes de cette maniere :

Dénominations précedentes :	a;	x;	s;	y;	α;	φ
Dénominations présentes :	c;	b;	a;	A;	B;	C

Maintenant les formules trouvées dans les corollaires du problème précedent nous fourniront pour le triangle sphérique ABC les propriétés suivantes :

I. $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B = \sin c : \sin C$ par (21)

II. $\begin{cases} \cos C = \cos c.\ \sin A.\ \sin B - \cos A.\ \cos B & \text{par §. 20.} \\ \cos B = \cos b.\ \sin A.\ \sin C - \cos A.\ \cos C & \text{par analogie} \\ \cos A = \cos a.\ \sin B.\ \sin C - \cos B.\ \cos C & \text{par §. 27.} \end{cases}$

III. $\begin{cases} \cos c = \cos C.\ \sin a.\ \sin b + \cos a.\ \cos b & \text{par analogie} \\ \cos b = \cos B.\ \sin a.\ \sin c + \cos a.\ \cos c & \text{par §. 22.} \\ \cos a = \cos A.\ \sin b.\ \sin c + \cos b.\ \cos c & \text{par §. 26.} \end{cases}$

IV. $\begin{cases} \sin a.\operatorname{tang} C - \sin B.\operatorname{tang} c = \cos a.\cos B.\operatorname{tg} C.\operatorname{tg} c & \text{par §. 23.} \\ \sin b.\operatorname{tang} A - \sin C.\operatorname{tang} a = \cos b.\cos C.\operatorname{tg} A.\operatorname{tg} a & \text{par analogie} \\ \sin c.\operatorname{tang} B - \sin A.\operatorname{tang} b = \cos c.\cos A.\operatorname{tg} B.\operatorname{tg} b & \text{par §. 19.} \end{cases}$

Et c'est à ces quatre propriétés, que se réduisent toutes les formules, que nous avons trouvées dans le problème précedent.

COROLL. I.

31. La premiére propriété renferme la qualité très connuë de tous les triangles sphériques, par laquelle nous savons, que les sinus des côtés ont entr'eux le même rapport, que les sinus des angles, qui leur sont opposés.

COROLL. 2.

32. Donc, si nous connoissons dans un triangle sphérique un côté avec son angle opposé, & outre cela un autre angle, ou côté, nous trouverons d'abord le côté, ou l'angle qui lui est opposé.

COROLL. 3.

33. Chacune des formules, que nous venons de trouver, ne renferme que quatre quantités, qui appartiennent au triangle, & partant si l'on en connoit trois, on en pourra déterminer la quatrième.

COROLL. 4.

34. C'est donc de là qu'on pourra tirer les régles pour la resolution de tous les triangles sphériques. Ou comme il y a six choses en chaque triangle, savoir les trois côtés & les trois angles, si l'on en connoit trois, on en pourra trouver les trois autres: comme nous allons voir dans les problèmes suivans.

PROBLEME VI.

35. *Dans un triangle sphérique étant donnés les trois côtés, trouver les angles.* Fig. 4.

SOLUTION.

Soient donnés dans le triangle sphérique ABC les trois côtés $AB = c$; $AC = b$ & $BC = a$; & qu'il faille chercher les trois angles A, B & C; cela se fera par le moyen de la troisième propriété, qui nous fournit:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a . \cos c}{\sin a . \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a . \cos b}{\sin a . \sin b}$$

COROLL. 1.

36. Nous aurons donc :

$$1 - \cos A = \frac{\sin b . \sin c + \cos b . \cos c - \cos a}{\sin b . \sin c},$$

ou bien $1 - \cos A = \dfrac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b . \sin c}$,

à cause de $\cos(b - c) = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c$.

COROLL. 2.

37. Or, puisqu'il est en général

$$\cos p - \cos q = 2 . \sin \tfrac{1}{2}(q - p) . \sin \tfrac{1}{2}(p + q)$$

notre formule se changera en celle-cy :

$$1 - \cos A = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a - b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b \sin c}.$$

Donc, puisque $1 - \cos A = 2 (\sin \frac{1}{2} A)^2$, nous aurons :

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b + c) . \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b . \sin c}},$$ & de même

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b - a + c) . \sin \frac{1}{2}(b + a - c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(c - a + b) . \sin \frac{1}{2}(c + a - b)}{\sin a . \sin b}}.$$

COROLL. 3.

38. En ajoutant l'unité aux cosinus trouvés on aura

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c + \sin b \sin c}{\sin b . \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b . \sin c}.$$

Donc, puisque $1 + \cos A = 2 (\cos \frac{1}{2} A)^2$, la même conversion donnera

cos

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(b+c-a) . \sin \tfrac{1}{2}(b+c+a)}{\sin b . \sin c}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a+c-b) . \sin \tfrac{1}{2}(a+c+b)}{\sin a . \sin b}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a+b-c) . \sin \tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\sin a . \sin b}}$$

COROLL. 4.

39. De là on tirera les tangentes des demi-angles A, B, C :

$$\tang \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b+c) \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin \tfrac{1}{2}(b+c-a) \sin \tfrac{1}{2}(b+c+a)}}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(b-a+c) \sin \tfrac{1}{2}(b+a-c)}{\sin \tfrac{1}{2}(a+c-b) \sin \tfrac{1}{2}(a+c+b)}}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(c-a+b) \sin \tfrac{1}{2}(c+a-b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a+b-c) \sin \tfrac{1}{2}(a+b+c)}}$$

COROLL. 5.

40. Ces formules sont fort commodes pour faire le calcul par le moyen des logarithmes. Or ayant trouvé un des angles comme A, on trouvera les deux autres plus facilement ; par la premiere propriété on aura : $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ & $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$, pourvu qu'on sache si ces angles sont plus grands ou plus petits qu'un angle droit : mais en se servant des formules trouvées cette ambiguité évanouït, puisqu'on trouve les moitiés des angles, qui sont toujours plus petites qu'un angle droit.

COROLL. 6.

41. Les tangentes des demi-angles fournissent encore des formules remarquables, car multipliant deux ensemble on aura :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b-c)}{\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)},$$

& puisque $\text{ſin}\,p + \text{ſin}\,q = 2\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\,(p-q)$

& $\text{ſin}\,p - \text{ſin}\,q = 2\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(p-q)\ \text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q)$

on obtiendra : $1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,B = \dfrac{2\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b)\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\,c}{\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)}$

& $1 - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,B = \dfrac{2\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,c\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)}.$

COROLL. 7.

42. De même en ajoutant ou ſoutrayant deux de ces tangentes, on aura :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A \pm \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{\left(\text{ſn}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b) \pm \text{ſn}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)\right)\sqrt{\text{ſn}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b-c)}}{\sqrt{\text{ſn}\,\tfrac{1}{2}\,(b+c-a)\ \text{ſn}\,\tfrac{1}{2}\,(a+c-b)\ \text{ſn}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)}}$$

ou $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A \pm \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,B = \dfrac{\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+c-b) \pm \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(b+c-a)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,C\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)},$

ſi l'on introduit la valeur de la tangente de $\tfrac{1}{2}$ C. Donc, en employant la réduction enſeignée auparavant, nous aurons ces deux équations :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{2\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,c.\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,C.\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{2\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a-b).\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\,c}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,C\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)}.$$

COROLL. 8.

43. Or, puisque $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,(A+B) = \dfrac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,B}{1 - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,B};$

nous trouverons par les formules des deux corollaires précedens :

tang

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\text{cof}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C.\,\text{cof}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}$$ & de même

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+C)=\frac{\text{cof}\,\tfrac{1}{2}(a-c)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}B.\,\text{cof}\,\tfrac{1}{2}(a+c)}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B+C)=\frac{\text{cof}\,\tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A.\,\text{cof}\,\tfrac{1}{2}(b+c)}.$$

COROLL. 9.

44. De même, puisque $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}B}{1+\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}B}$; nous aurons :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{fin}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C.\,\text{fin}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}$$ & de même

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-C)=\frac{\text{fin}\,\tfrac{1}{2}(a-c)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}B.\,\text{fin}\,\tfrac{1}{2}(a+c)}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{\text{fin}\,\tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A.\,\text{fin}\,\tfrac{1}{2}(b+c)}.$$

PROBLEME VII.

45. *Dans un triangle fphérique étant donnés les trois angles, trouver les trois côtés.* Fig. 4.

SOLUTION.

Soit A B C le triangle fphérique, duquel foient donnés les trois angles A, B, C; & qu'il faille chercher les trois côtés

$$AB=c\,;\quad AC=b\quad\&\quad BC=a.$$

Or la propriété II. du §. 30. nous fournira les cofinus de ces côtés exprimés de la maniere fuivante:

cof

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A . \cos C}{\sin A . \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A . \cos B}{\sin A . \sin B} .$$

COROLL. I.

46. De là nous tirerons d'abord les formules suivantes :

$$1 - \cos a = - \frac{\cos A - \cos (B + C)}{\sin B . \sin C}$$

$$1 - \cos a = \frac{\cos A + \cos (B - C)}{\sin B \sin C}$$

Or, puisqu'il est en général $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2} (p + q) \cos \frac{1}{2} (p - q)$ nous aurons :

$$1 - \cos a = - \frac{2 \cos \frac{1}{2} (A + B + C) \cos \frac{1}{2} (B + C - A)}{\sin B . \sin C}$$

$$1 + \cos a = \frac{2 \cos \frac{1}{2} (A + B - C) \cos \frac{1}{2} (A - B + C)}{\sin B . \sin C} .$$

COROLL. 2.

47. Donc, puisque $1 - \cos a = 2 (\sin \frac{1}{2} a)^2$ & $1 + \cos a = 2 (\cos \frac{1}{2} a)^2$, nous obtiendrons les formules suivantes :

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{- \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B + C) \cos \frac{1}{2} (B + C - A}{\sin B . \sin C}}$$

$$\sin \frac{1}{2} b = \sqrt{- \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B + C) \cos \frac{1}{2} (A + C - B)}{\sin A . \sin C}}$$

$$\sin \frac{1}{2} c = \sqrt{- \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B + C) \cos \frac{1}{2} (A + B - C)}{\sin A . \sin B}}$$

où

où il faut remarquer, puiſque la ſomme des angles $A+B+C$ eſt toujours plus grande que deux droits, la demi-ſomme eſt plus grande qu'un angle droit, & partant ſon coſinus negatif.

COROLL. 3.

48. Pour les coſinus des demi-côtés on aura :

$$\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A+B-C)\;\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A-B+C)}{\text{ſin}\,B.\;\text{ſin}\,C}}$$

$$\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\,b = \sqrt{\frac{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(B+A-C)\;\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(B-A+C)}{\text{ſin}\,A.\;\text{ſin}\,C}}$$

$$\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}\,c = \sqrt{\frac{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(C+A-B)\;\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(C-A+B)}{\text{ſin}\,A.\;\text{ſin}\,B}}$$

& ces formules facilitent l'uſage des logarithmes.

COROLL. 4.

49. Des ſinus & coſinus des demi-côtés on tirera aiſément leurs tangentes ; qui ſeront :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{-\frac{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A+B+C)\;\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(B+C-A)}{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A+B-C)\;\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A-B+C)}}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,b = \sqrt{-\frac{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A+B+C)\;\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A+C-B)}{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(B+A-C)\;\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(B-A+C)}}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,c = \sqrt{-\frac{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A+B+C)\;\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A+B-C)}{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(C+A-B)\;\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(C-A+B)}}$$

où l'on pourra auſſi aiſément ſe ſervir du calcul des logarithmes.

COROLL. 5.

50. En multipliant deux de ces tangentes enſemble, on en tirera

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,a.\;\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,b = -\frac{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A+B+C)}{\text{coſ}\,\frac{1}{2}\,(A+B-C)}$$

 Or

Or de là on derivera les deux formules suivantes :

$$1 - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a.\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}b = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}$$

$$1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a.\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}b = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}C\,\sin\tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}.$$

COROLL. 6.

51. Et si nous ajoutons, ou soutrayons, deux des formules ensemble, nous obtiendrons : $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a \pm \text{tang}\,\tfrac{1}{2}b =$

$$= \frac{(\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A) \pm \cos\tfrac{1}{2}(A+C-B))\sqrt{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)}}{\sqrt{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}}$$

Or ayant $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(C+A-B)\cos\tfrac{1}{2}(C-A+B)}}$, on aura

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a \pm \text{tang}\,\tfrac{1}{2}b = \frac{(\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A) \pm \cos\tfrac{1}{2}(A+C-B))\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}.$$

COROLL. 7.

52. De là on trouvera par les réductions enseignes :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}b = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}, \quad \&$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}b = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}.$$

COROLL. 8.

53. Nous trouverons donc comme cy-dessus :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+c) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(A-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+C)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}b$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(B+C)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a.$$

co-

COROLL. 9.

54. De même les tangentes des demi differences des côtés seront :

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\text{sin } \frac{1}{2}(A - B)}{\text{sin } \frac{1}{2}(A + B)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} c$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a - c) = \frac{\text{sin } \frac{1}{2}(A - C)}{\text{sin } \frac{1}{2}(A + C)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} b$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(b - c) = \frac{\text{sin } \frac{1}{2}(B - C)}{\text{sin } \frac{1}{2}(B + C)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} a.$$

L'usage de ces formules sera d'une grande importance dans les problèmes suivans.

PROBLEME VIII.

55. *Dans un triangle sphérique étant donnés deux côtés avec l'angle compris entr'eux, trouver le troisième côté & les deux autres angles.* Fig. 4.

SOLUTION.

Soit ABC le triangle, auquel soient donnés les deux côtés $AB = c$ $AC = b$ avec l'angle A compris entr'eux : & qu'il faille chercher le côté $BC = a$, & les angles B & C.

La troisième formule de la troisième propriété donne d'abord

$$\text{cos } a = \text{cos } A \text{ sin } b. \text{ sin } c + \text{cos } b. \text{ cos } c,$$

& la troisième formule de la quatrième propriété fournit l'angle B,

$$\text{tang } B = \frac{\text{sin } A \text{ tang } b}{\text{sin } c - \text{tang } b. \text{ cos } c. \text{ cos } A}$$

d'où l'on tire par analogie :

$$\text{tang } C = \frac{\text{sin } A \text{ tang } c}{\text{sin } b - \text{tang } c. \text{ cos } b. \text{ cos } A}.$$

Or les expressions pour les cotangentes seront plus commodes, de sorte qu'on aura pour la solution les formules suivantes :

$$\text{cof}\, a = \text{cof A fin}\, b.\ \text{fin}\, c + \text{cof}\, b.\ \text{cof}\, c$$

$$\text{cot B} = \frac{\text{fin}\, c\ \text{cot}\, b - \text{cof}\, c\ \text{cof A}}{\text{fin A}}$$

$$\text{cot C} = \frac{\text{fin}\, b\ \text{cot}\, c - \text{cof}\, b.\ \text{cof A}}{\text{fin A}}.$$

COROLL. I.

56. Puisque $\text{cof}\, b.\ \text{cof}\, c = \frac{1}{2}\ \text{cof}\,(b - c) + \frac{1}{2}\ \text{cof}\,(b + c)$ & $\text{fin}\, b\ \text{fin}\, c = \frac{1}{2}\ \text{cof}\,(b - c) - \frac{1}{2}\ \text{cof}\,(b + c)$, le cofinus du côté a pourra être exprimé par l'addition & fubtraction des fimples cofinus de cette maniere :

$$\text{cof}\, a = \tfrac{1}{4}\,\text{cf}(\text{A} - b + c) + \tfrac{1}{4}\,\text{cf}(\text{A} + b - c) - \tfrac{1}{4}\,\text{cf}(\text{A} - b - c) - \tfrac{1}{4}\,\text{cf}(\text{A} + b + c)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\text{cof}(b - c) + \tfrac{1}{2}\,\text{cof}(b + c).$$

COROLL. 2.

57. Mais fi l'on veut fe fervir des logarithmes, cette formule eft moins commode. Cependant on y pourra appliquer les logarithmes en y introduifant un nouveau angle u, pofant

$\text{tang}\ u = \frac{\text{cof A fin}\, b}{\text{cof}\, b}$, ou bien foit $\text{tang}\ u = \text{cof A tang}\ b$;

& ayant trouvé cet angle u on aura :

$$\text{cof}\, a = \text{tang}\ u\ \text{cof}\, b\ \text{fin}\, c + \text{cof}\, b\ \text{cof}\, c = \frac{\text{cof}\, b\ \text{cof}\,(c - u)}{\text{cof}\, u},$$

d'où l'on trouvera aifément le côté a par le moyen des logarithmes.

COROLL. 3.

58. La même introduction de l'angle u, de forte que $\text{tg}\, u = \text{cf A tg}\, b$, rend auffi les autres formules propres à y appliquer les logarithmes ; car on aura :

$$\text{tang B} = \frac{\text{fin A tang}\, b}{\text{fin}\, c - \text{tg}\, u\ \text{cf}\, c} = \frac{\text{fin A tang}\, b\ \text{cof}\, u}{\text{fin}\,(c - u)} = \frac{\text{tang A fin}\, u}{\text{fin}\,(c - u)}.$$

Pour l'autre angle C on le trouvera par la régle $\text{fin C} = \frac{\text{fin A. fin}\, c}{\text{fin}\, a}$.

co-

COROLL. 4.

59. Mais la plus commode recherche des angles B & C se tirera des formules données dans les §§. 43. & 44. d'où l'on aura :

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\text{cos}\ \tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{cos}\ \tfrac{1}{2}(b+c)}\ \text{cot}\ \tfrac{1}{2}A$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\text{sin}\ \tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{sin}\ \tfrac{1}{2}(b+c)}\ \text{cot}\ \tfrac{1}{2}A.$$

Car ayant la moitié de leur somme avec la moitié de leur difference, on aura chacun à part, & de là on pourra ensuite conclure le côté a, par la régle $\text{sin}\ a = \frac{\text{sin}\ b}{\text{sin}\ B}\ \text{sin}\ A = \frac{\text{sin}\ c}{\text{sin}\ C}\ \text{sin}\ A.$

PROBLEME IX.

60. *Dans un triangle sphérique étant donnés deux angles avec le côté compris entr'eux, trouver le troisième angle avec les deux côtés.* Fig. 4.

SOLUTION.

Soit ABC le triangle, dans lequel soient donnés les deux angles A & B avec le côté AB $= c$ compris entr'eux, & qu'il faille chercher le troisième angle C avec les deux autres côtés AC $= b$ & BC $= a$.

Or la premiere formule de la seconde propriété (30) donne d'abord

$$\text{cos}\ C = \text{cos}\ c\ \text{sin}\ A.\ \text{sin}\ B - \text{cos}\ A.\ \text{cos}\ B,$$

& la troisième formule de la quatrième propriété donne :

$$\text{tang}\ b = \frac{\text{sin}\ c\ \text{tang}\ B}{\text{sin}\ A + \text{cos}\ c.\ \text{cos}\ A.\ \text{tang}\ B},$$ & par analogie

$$\text{tang}\ a = \frac{\text{sin}\ c\ \text{tang}\ A}{\text{sin}\ B + \text{cos}\ c.\ \text{cos}\ B.\ \text{tang}\ A}.$$

D'où prenant les cotangentes on aura la solution suivante,

$$\text{cos}\ C = \text{cos}\ c.\ \text{sin}\ A.\ \text{sin}\ B - \text{cos}\ A.\ \text{cos}\ B$$

$$\text{cot}\ a = \frac{\text{cot}\ A.\ \text{sin}\ B + \text{cos}\ c.\ \text{cos}\ B}{\text{sin}\ c}$$

$$\text{cot}\ a = \frac{\text{cot}\ B.\ \text{sin}\ A + \text{cos}\ c.\ \text{cos}\ A}{\text{sin}\ c}.$$

COROLL. 1.

61. Les deux côtés se trouveront plus aisément des formules des §§. 52. & 53. d'où l'on tire :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\text{cof}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{cof}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{fin}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{fin}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c.$$

où il est facile de se servir des logarithmes.

COROLL. 2.

62. Après avoir trouvé les côtés a & b, on trouvera aisément l'angle C, puisqu'il est $\text{fin}\,C = \frac{\text{fin}\,A}{\text{fin}\,a}\,\text{fin}\,c = \frac{\text{fin}\,B}{\text{fin}\,b}\,\text{fin}\,c$, où bien on pourra aussi, si l'on veut exprimer le cof C par des simples cosinus en cette façon :

$$\text{cof}\,C = \tfrac{1}{4}\,\text{cf}(c+A-B) + \tfrac{1}{4}\,\text{cf}(c-A+B) - \tfrac{1}{4}\,\text{cf}(c-A-B) - \tfrac{1}{4}\,\text{cf}(c+A+B) - \tfrac{1}{2}\,\text{cof}(A-B) - \tfrac{1}{2}\,\text{cof}(A+B).$$

PROBLEME X.

63. *Dans un triangle sphérique étant donnés deux côtés avec un angle non compris entr'eux, ou ce qui revient au même, étant donnés deux angles avec un côté non compris entr'eux, trouver les autres quantités appartenantes au triangle.* Fig. 4.

SOLUTION.

Soit ABC, le triangle dans lequel soient donnés pour le premier cas les deux côtés $BC = a$ & $AC = b$ avec l'angle A, & on connoitra d'abord l'angle B à cause de $\text{fin}\,B = \frac{\text{fin}\,A}{\text{fin}\,a}\,\text{fin}\,b$.

Pour

Pour l'autre cas ſoient A & B les deux angles donnés, avec le côté $BC = a$, & on aura d'abord le côté b à cauſe de $\sin b = \frac{\sin a}{\sin A}\sin B$. Et partant, dans l'un & l'autre cas on pourra regarder comme donnés tant les deux côtés $BC = a$ & $AC = b$, que les deux angles A & B, qui leur ſont oppoſés. Il s'agit donc d'en trouver le côté $AB = c$, & l'angle C.

Or la premiere formule de la quatrième propriété fournit:

$$\sin a \tan C - \sin B \tan c = \cos a \cos B \tan C \tan c,$$

d'où en transpoſant les côtés a & b avec les angles A & B, nous aurons

$$\sin b \tan C - \sin A \tan c = \cos b . \cos A \tan C \tan c.$$

De ces deux équations, en éliminant tantôt tang C tantôt tang c, nous trouverons:

$$\tan c = \frac{\sin A . \sin a - \sin B . \sin b}{\sin A \cos B \cos a - \cos A \sin B \cos b}$$

$$\tan C = \frac{\sin A \sin a - \sin B \sin b}{\cos B \cos a \sin b - \cos A \sin a \cos b},$$

auxquelles il faut ajouter cette équation $\sin A \sin b = \sin B \sin a$.

COROLL. 1.

64. Puisqu'il y a: $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$, nous aurons auſſi:

$$\tan c = \frac{\sin a^2 - \sin b^2}{\cos B \sin a \cos a - \cos A \sin b \cos b}$$

&

$$\tan C = \frac{\sin A^2 - \sin B^2}{\sin B \cos B \cos a - \sin A \cos A \cos b}.$$

COROLL. 2.

65. Mais les §§. 43. 44. 53. & 54. nous fourniſſent encore des ſolutions plus commodes, que voilà:

tang

$$\tang \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-b)$$

&

$$\tang \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}(A-B)$$

auxquelles on peut aisément appliquer l'usage des logarithmes.

PROBLEME IX.

Fig. 3. 66. *Trouver l'aire d'un triangle sphérique quelconque.*

SOLUTION.

Soit EOM le triangle sphérique proposé, & qu'on nomme comme cy-dessus §. 17. le côté $OE = a$; l'angle $OEM = \alpha$; l'angle $EOM = y$; le côté $OM = x$; & l'angle $OME = \Phi$. Cela posé, la figure trilineaire MOm représentera le differentiel de l'aire que nous cherchons; & puisque $mn = dx$ & $Mn = dy \sin x$ le produit $dy dx \sin x$ exprime le differentiel de MOm, d'où $MOm = dy \int dx \sin x = dy\,(1 - \cos x)$ & partant l'aire

$$EOM = y - \int dy \cos x.$$

Or nous avons trouvé $dy = \frac{C dx}{\sin x \sqrt{(\sin x^2 - CC)}}$, de sorte que

$$\text{l'aire } EOM = y - \int \frac{C dx \cos x}{\sin x \sqrt{(\sin x^2 - CC)}}.$$

Ensuite ayant trouvé $\sin \Phi = \frac{C}{\sin x}$, à cause de $C = \sin a \sin \alpha$;

& puisque $\cos \Phi = \frac{\sqrt{(\sin x^2 - CC)}}{\sin x}$, nous aurons

$d\Phi \cos \Phi = -dx \frac{\cos x}{\sin x^2}$, donc $d\Phi = -\frac{C dx \cos x}{\sin x \sqrt{(\sin x^2 - CC)}}$

& $-\int \frac{C dx \cos x}{\sin x \sqrt{(\sin x^2 - CC)}} = \Phi + \text{Const.}$

Par

Par conſéquent l'aire du triangle

EOM ſera $= y + \varphi +$ Conſt. $= \alpha + y + \varphi -$ Conſt.

Pour connoitre cette conſtante, ſuppoſons $y = 0$, & puisqu'il devient alors $\varphi = 180° - \alpha$, l'aire de ce triangle évanouïſſant ſera $= 180° -$ Conſt. & partant Conſt. $= 180°$. Ainſi nous aurons l'aire du triangle EOM $= \alpha + y + \varphi - 180°$.

COROLL. 1.

67. Donc, pour trouver l'aire d'un triangle ſphérique quelconque, on n'a qu'à prendre l'excès de la ſomme de ſes trois angles ſur deux droits, lorsque le rayon de la ſphère eſt exprimé par 1. Or dans une ſphère quelconque on prendra un arc d'un grand cercle qui ſoit la méſure dudit excès; & le produit de cet arc par le rayon de la ſphère donnera l'aire du triangle ſphérique cherché.

COROLL. 2.

68. Plus donc un triangle ſphérique ſera grand, plus auſſi ſurpaſſera la ſomme de ſes angles deux droits; & lorsque l'aire du triangle occupe la huitième partie de la ſurface de la ſphère, cet excès vaudra un angle droit. Car un arc de grand cercle de 90° multiplié par le rayon donne la moitié de l'aire du grand cercle, & partant la huitième partie de la ſurface de la ſphère. De là on tirera cette régle pour trouver l'aire de tout triangle ſphérique. On dira, comme 8 angles droits ou 720° à l'excès de la ſomme des trois angles ſur deux droits: ainſi la ſurface entiere de la ſphère à l'aire du triangle propoſé.



ad pag. 226.

Tab. V.

Fig. 1.

O
M m
n
A B
P p

Fig. 2.

B
c a
A C
b

Fig. 3.

O
E
n
M m
A B

Fig. 4.

A
c b
B
a C

Mem. de l'Acad. Tom. IX pag. 552.

F H Frisch sc. B.